أولاً : تعريف رتبة مصفوفة :

إن رتبة المصفوفة A من المرتبة $m \times n$ هي عدد طبيعي r حيث $r \leq min(m,n)$ و نرمزلها بـ $Rank(A) = r$ وهي مرتبة أكبر صغيرلهذه المصفوفة لا يساوي الصفر .

مثال : عين رتبة المصفوفات التالية :

❶ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

- $det(A) = 3 \neq 0 \quad \rightarrow Rank(A) = 3$

❷ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

- $det(B) = 0$
- نبحث عن محدد أصغر لا يساوي الصفر مثل $det(B_{11}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$ و بالتالي فإن رتبة المصفوفة B هي $Rank(B) = 2$

❸ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

- $det(C) = 0$
- نبحث عن محدد من المرتبة الثانية لا يساوي الصفر :

$det(C_{11}) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 0$	$det(C_{21}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 0$	$det(C_{31}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$
$det(C_{12}) = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 0$	$det(C_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 0$	$det(C_{32}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$
$det(C_{13}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$	$det(C_{23}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$	$det(C_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

- إن جميع المحددات من المرتبة الثانية تساوي الصفر ، لذا نأخذ المحددات من المرتبة الأولى $|1| = 1 \neq 0$ إذن رتبة المصفوفة C هي $Rank(C) = 1$ (نتوقف عند أول محدد مغاير للصفر).

ثانياً : التحويلات الأولية على المصفوفات :

1) تبادل سطرين أو عمودين

2) ضرب عناصر أحد الأسطر (أو أحد الأعمدة) بعدد حقيقي $\alpha \neq 0$.

3) إضافة عناصر سطر (أو عمود) بعد ضربه بعدد حقيقي $\alpha \neq 0$ إلى عناصر سطر (أو عمود) آخر

ثالثاً : تعريف المصفوفتان المتكافئتان :

نقول إن المصفوفتين A, B متكافئتان إذا كانت إحداهما ناتجة عن الأخرى بتطبيق تحويلات أولية و نكتب $A \sim B$

رابعاً :

- إن تطبيق أي تحويل أولي على أعمدة (أسطر) مصفوفة لا يغير من رتبتها .
- إن رتبة مصفوفة هي عدد الأسطر التي ليست جميع عناصرها أصفار بعد تحويل المصفوفة إلى الشكل المدرج .

اوجد رتبة المصفوفة : $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (تم إيجاد رتبة هذه المصفوفة حسب التعريف في فقرة سابقة)

الحل :

- $B \underset{R_1 \leftrightarrows R_3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{R_2 = R_2 + 3R_1 \\ R_3 = R_3 + 2R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} \underset{R_3 = R_3 - R_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

خامساً : إيجاد معكوس مصفوفة بالطريقة الخلوية :

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n ، و المطلوب إيجاد معكوسها ، نشكل المصفوفة الخلوية المستطيلة $(A \vdots I)$ حيث I المصفوفة الواحدية من المرتبة n . إذا أنجزنا سلسلة منتهية من التحويلات السطرية البسيطة على $(A \vdots I)$ و حصلنا على المصفوفة $(I \vdots B)$ فإن B هي المصفوفة المعاكسة لـ A و بمعنى آخر $(A \vdots I) \sim (I \vdots B) \rightarrow B = A^{-1}$

ملاحظات :

1) إن تطبيق الطريقة الخلوية لإيجاد معكوس مصفوفة يتم فقط بإجراء العمليات على الأسطر دون الأعمدة.

2) إذا توصلنا من المصفوفة A وفق سلسلة منتهية من التحويلات الأولية إلى مصفوفة تحوي على الأقل سطراً صفرياً فإننا نتوقف عند هذا الحد من التحويلات و نستنتج أن المصفوفة A شاذة و ليس لها معكوس.

التمرين الأول : لتكون المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&3\\5&5&1\end{bmatrix}$ و المطلوب إيجاد A^{-1} بطريقة الخلوية .

- $(A\,\vdots\,I)=\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&1&0&0\\0&2&3&\vdots&0&1&0\\5&5&1&\vdots&0&0&1\end{bmatrix}\underset{R_3=R_3-5R_1}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&1&0&0\\0&2&3&\vdots&0&1&0\\0&0&-4&\vdots&-5&0&1\end{bmatrix}$

- $(A\,\vdots\,I)\sim\begin{matrix}R_2=\frac{1}{2}R_2\\ \\R_3=-\frac{1}{4}R_3\end{matrix}\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&1&0&0\\0&1&3/2&\vdots&0&1/2&0\\0&0&1&\vdots&5/4&0&-1/4\end{bmatrix}$

- $(A\,\vdots\,I)\sim\begin{matrix}R_1=R_1-R_3\\ \\R_2=R_2-\frac{3}{2}R_3\end{matrix}\begin{bmatrix}1&1&0&\vdots&-1/4&0&1/4\\0&1&0&\vdots&-15/8&1/2&3/8\\0&0&1&\vdots&5/4&0&-1/4\end{bmatrix}$

- $(A\,\vdots\,I)\sim R_1=R_1-R_2\begin{bmatrix}1&0&0&\vdots&13/8&-1/2&-1/8\\0&1&0&\vdots&-15/8&1/2&3/8\\0&0&1&\vdots&5/4&0&-1/4\end{bmatrix}=(I\,\vdots\,A^{-1})\rightarrow$

- $A^{-1}=\begin{bmatrix}13/8&-1/2&-1/8\\-15/8&1/2&3/8\\5/4&0&-1/4\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}13&-4&-1\\-15&4&3\\10&0&-2\end{bmatrix}$

التمرين الثاني : لتكون المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\1&-2&1\\5&-2&-3\end{bmatrix}$ و المطلوب إيجاد A^{-1} بطريقة الخلوية إن وجدت .

- $(A\,\vdots\,I)=\begin{bmatrix}1&2&-3&\vdots&1&0&0\\1&-2&1&\vdots&0&1&0\\5&-2&-3&\vdots&0&0&1\end{bmatrix}\begin{matrix}R_2=R_2-R_1\\ \sim\\R_3=R_3-5R_1\end{matrix}\begin{bmatrix}1&2&-3&\vdots&1&0&0\\0&-4&4&\vdots&-1&1&0\\0&-12&-12&\vdots&-5&0&1\end{bmatrix}$

- $(A\,\vdots\,I)\sim R_3=R_3-3R_2\begin{bmatrix}1&2&-3&\vdots&1&0&0\\0&-4&4&\vdots&-1&1&0\\0&0&0&\vdots&-2&-3&1\end{bmatrix}$

نلاحظ ظهور السطر الصفري و بالتالي المصفوفة A شاذة و ليس لها معكوس.